الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا
الدورة العادية 2012
الموضوع

المادة	الرياضيات NS25	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب) (الترجمة الفرنسية)	مدة الإنجاز	4

- La durée de l'épreuve est de 4 heures.
- L'épreuve comporte cinq exercices indépendants deux à deux.
- Les exercices peuvent être traités selon l'ordre choisi par le candidat.

- Le premier exercice se rapporte aux structures algébriques
- Le deuxième exercice se rapporte aux nombres complexes
- Le troisième exercice se rapporte à l'arithmétique
- Le quatrième exercice se rapporte à l'analyse
- Le cinquième exercice se rapporte à l'analyse

L'USAGE DES CALCULATRICES NON PROGRAMMABLES EST AUTORISE

L'usage de la couleur rouge n'est pas permis

<u>EXERCICE 1 :</u>(3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

I- Dans l'anneau unitaire $\left(\mathrm{M}_3(\mathbf{R}),+,\times\right)$, on considère les deux matrices

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

0.75 1) Calculer $I-A$ et A^2

0.5 2) En déduire que A admet une matrice inverse que l'on déterminera .

II- Pour tout a et b de l'intervalle $I=\left]1,+\infty\right[$, on pose: $a*b=\sqrt{a^2b^2-a^2-b^2+2}$

0.25 1) Vérifier que : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$; $x^2y^2-x^2-y^2+2=(x^2-1)(y^2-1)+1$

0.5 2) Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

3) On rappelle que $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ est un groupe commutatif.

On considère l'application
$$\varphi:\ \mathbb{R}^{*+}\to I$$
$$x\mapsto\sqrt{x+1}$$

0,5 a - Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^{*+},\times)$ vers $(I,*)$

0.25 b - En déduire la structure de $(I,*)$

0.75 c - Montrer que l'ensemble $\Gamma=\left\{\sqrt{1+2^m}\ /\ m\in\mathbb{Z}\right\}$ est un sous groupe de $(I,*)$

<u>EXERCICE 2 :</u>(3.5 points) les parties I et II sont indépendantes

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}\,;\vec{u}\,,\vec{v}\right)$

I- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E)\ :\ iz^2+(2-i)az-(1+i)a^2=0$ où a est un nombre complexe non nul.

0.75 1) Déterminer z_1 et z_2, les deux racines de l'équation (E)

0.25 2) a- Vérifier que : $z_1z_2=a^2(i-1)$.

0.5 b- Montrer que : z_1z_2 est un nombre réel $\Leftrightarrow$ $\arg a\equiv\dfrac{-3\pi}{8}\left[\dfrac{\pi}{2}\right]$

II- Soient c un nombre réel non nul et z un nombre complexe non nul.

On considère les points A , B , C , D et M d'affixes respectifs 1 , $1+i$, c , ic et z

0,5 1)a- Montrer que : A , D et M sont alignés $\Leftrightarrow (ic+1)z+(ic-1)\bar{z}=2ic$ (remarquer que $c=\bar{c}$)

0,5 b –Montrer que : $(AD)\perp(OM) \Leftrightarrow (ic+1)z-(ic-1)\bar{z}=0$

2) Soit h l' affixe du point H , la projection orthogonale du point O sur (AD)

0.75 a - Montrer que : $h-(1+i)=\dfrac{i}{c}(h-c)$.

0.25 b - En déduire que $(CH)\perp(BH)$

<u>EXERCICE 3 :</u>(3 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) : $143x-195y=52$

0.5 a – Déterminer le plus grand commun diviseur de 143 et 195 , puis en déduire que l'équation (E) admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

0.75 b – Sachant que $(-1,-1)$ est une solution particulière de l'équation (E) , résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E) en précisant les étapes de la résolution.

2) Soit n un entier naturel non nul premier avec 5

0.5 Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$ on a : $n^{4k}\equiv 1\ [5]$

3) Soient x et y deux entiers naturels non nuls tel que $x\equiv y\ [4]$

0,5 a- Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x\equiv n^y\ [5]$

0.5 b- En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $n^x\equiv n^y\ [10]$

0.25 4) Soient x et y deux entiers naturels tel que (x,y) est solution de l'équation (E)

Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les deux nombres n^x et n^y ont le même chiffre des unités dans l'écriture dans le système décimal.

<u>EXERCICE 4</u> :(5.5 points)

n est un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f_n définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_n(x)=x+\dfrac{e^{-x}}{n}$

Soit (C_n) la courbe représentative de f_n dans le plan muni d' un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

0,5 1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$

0.5 2) a - Etudier la branche infinie de (C_n) au voisinage de $-\infty$.

0.5 b - Montrer que la droite (D) d'équation $y=x$ est une asymptote oblique à la courbe (C_n) au voisinage de $+\infty$, puis déterminer la position relative de (C_n) et (D)

0.75 3) Etudier les variations de f_n et dresser son tableau de variations.

0.75 4) Construire la courbe (C_3) .(On prend $f_3(-0,6)\approx 0$ et $f_3(-1,5)\approx 0$ et $\ln 3\approx 1,1$)

0.25 5) a- Montrer que pour $n\geq 3$ on a : $\dfrac{e}{n}<\ln n$

1 b- Montrer que pour $n\geq 3$ l'équation $f_n(x)=0$ admet exactement deux solutions x_n et y_n telles que : $x_n\leq -\ln n$ et $\dfrac{-e}{n}\leq y_n\leq 0$

0.5 c- Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$

6) On considère la fonction numérique g définie sur $[0,+\infty[$ par : $\begin{cases} g(x)=-1-x\ln x \ ; \ x>0 \\ g(0)=-1 \end{cases}$

0.25 a- Montrer que la fonction g est continue à droite au point 0

0.25 b- Vérifier que pour $n\geq 3$ on a : $g\left(\dfrac{-1}{x_n}\right)=\dfrac{\ln n}{x_n}$

0.25 c- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{x_n}$

<u>EXERCICE 5</u> : (4.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur $[0,1]$ par :

$$F(0)=1 \quad \text{et} \quad F(x)=\frac{1}{x}-\frac{\ln(1+2x)}{2x^2} \quad \text{si} \quad x>0$$

0.25 1) Soit x un élément de $[0,1]$; Montrer que pour tout t de $[0,x]$ on a : $\dfrac{1}{1+2x}\leq\dfrac{1}{1+2t}\leq 1$

2) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F(x)=\dfrac{2}{x^2}\displaystyle\int_0^x\frac{t}{1+2t}dt$

0.75 b -Montrer que : $\dfrac{1}{1+2x}\leq F(x)\leq 1$ En déduire que la fonction F est continue à droite au point 0

0.75 3) En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout x de $[0,1]$ on a:

$$\int_0^x\frac{2t}{1+2t}dt=\frac{x^2}{1+2x}+2\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$$

4) Soit x un élément de $]0,1]$

0.5 a- Montrer que $F'(x)=-\dfrac{4}{x^3}\displaystyle\int_0^x\left(\frac{t}{1+2t}\right)^2dt$

0.75 b-Montrer que : $\dfrac{-4}{3}\leq F'(x)\leq\dfrac{-4}{3\,(1+2x)^2}$ (on pourra utiliser le résultat de la question 1))

0.75 c- En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction F sur $[0,x]$ montrer que $\dfrac{-4}{3}\leq\dfrac{F(x)-F(0)}{x}\leq\dfrac{-4}{3\,(1+2x)^2}$

0.25 d- Déduire que la fonction F est dérivable à droite en 0 en précisant son nombre dérivé a droite au point 0 .

FIN DE L'EPREUVE